

REKENEN IN KLEUR,

OF: SCHRIJVEN WIJ DE CIJFERS IN ONZE GETALLEN IN OMGEKEERDE VOLGORDE?

JAN JUST WITKAM

Dat de cijfers die wij gebruiken ons door de Arabieren zijn gegeven wordt algemeen aangenomen. Wij noemen die cijfers daarom ook ‘Arabische cijfers’. In het moderne Arabisch heten deze cijfers ‘Indische cijfers’, omdat de Arabieren lang geleden dit cijfersysteem aan de Indiëse wiskundigen hebben ontleend. De cijfers die nu in een groot deel van de Arabische wereld worden gebruikt lijken in vorm niet erg op de cijfers die wij gebruiken, maar, zo wordt dan gezegd, het gaat niet om de vorm van de cijfertekens, maar om het systeem van positioneel gebruik van de cijfers van 1 tot 9 en de nul, waarmee wij onze getallen noteren. De werkelijkheid is, zoals vaak, net iets ingewikkelder, want er zijn aanwijzingen dat al lang vóór de komst van islam bij de volgelingen van Pythagoras ideeën over positionele notatie bestonden, en ook dat met name in het zuidwesten van Europa ook beïnvloeding in omgekeerde richting, van christenen naar moslims, heeft plaats gevonden.¹

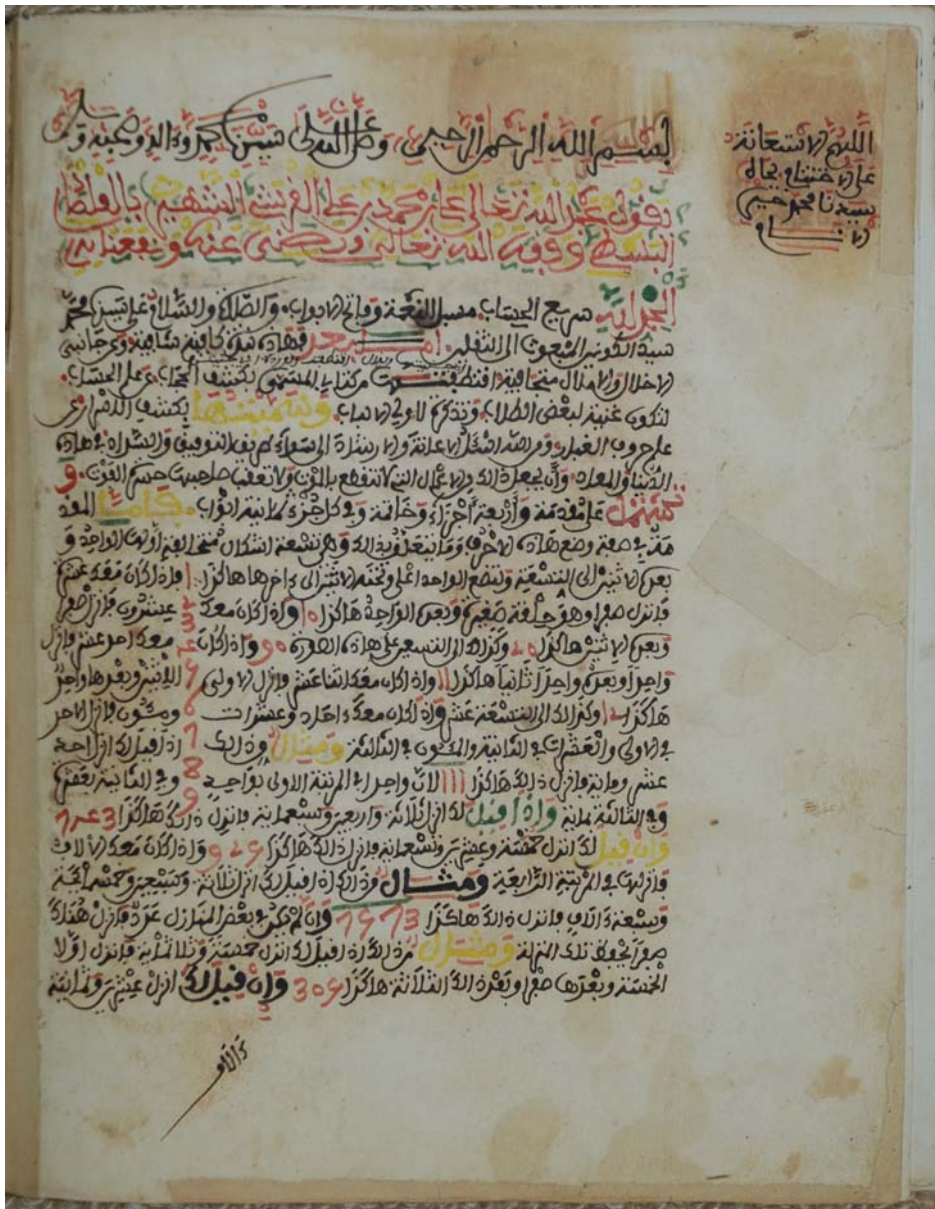
Waarover de geleerden niets lijken te zeggen is in welke richting wij onze getallen opschrijven. Iedereen weet immers dat hij zijn getallen precies zo schrijft als hij dat op de lagere school geleerd heeft, van links naar rechts. Maar het Arabisch wordt van rechts naar links geschreven. Betekent dit nu dat de volgorde van de cijfers binnen de getallen die de Arabieren schrijven gespiegeld is? Nee, iedere Nederlander die Arabisch leert krijgt bij de behandeling van de cijfers vrijwel direct te horen dat die ‘net als bij ons’ worden geschreven. En zo is dat ook. Het getal 1258 ziet er in het Arabische schrift hetzelfde uit ١٢٥٨ , andere vormen, jawel, maar met de cijfers in dezelfde volgorde geschreven en snel herkenbaar. Niets aan de hand dus. Maar nu even terug naar de tweede of derde klas lagere school. Daar werd ons geleerd, toen de grondbeginselen van het cijferen aan de orde kwamen, dat wij met eenheden, tientallen, honderdtallen, duizendtallen, enz., te maken hadden, kortom daar werd ons de positionele notatie uitgelegd, waarmee wij handmatig leerden optellen, aftrekken, vermenigvuldigen en delen. Maar zó, in die volgorde, te beginnen met de eenheden, schrijven wij onze getallen niet op, wij beginnen bij het schrijven met de hoogste categorie en dalen dan stap voor stap af tot aan de eenheden. Bij voorbeeld: in het getal 1453 schrijven wij eerst de 1, dan de 4, dan de 5 en tenslotte de 3, het eerste cijfer een duizendtal, het tweede een honderdtal, het derde een tiental en het laatste een eenheid, precies in de omgekeerde volgorde dus van onze eigen opsomming van diezelfde categorieën van de positionele notatie. Bij de Arabieren ging dat net andersom, zoals wij zullen zien. Waarom dat gebeurt is duidelijk, onze schrijfrichting is nu eenmaal van links naar rechts. Maar toch lijkt het juist om te zeggen: ‘wij schrijven de cijfers in onze getallen in omgekeerde volgorde.’

In de oude Arabische rekenboeken is dit allemaal geen probleem. Ik geef hier als voorbeeld de inleidende passage van een werkje over cijferen dat geschreven is door ‘Alī b. Muḥammad b. ‘Alī al-Qurashī al-Qalaṣādī al-Baṣṭī (1412-1486). Deze Andalusische wiskundige uit het emiraat Granada is bij ons vooral bekend gebleven vanwege zijn ideeën over algebraïsche notaties maar bij zijn tijdgenoten was hij bekend door zijn verhandelingen over het berekenen van de erfporties. In die tak van rekenkunde wordt gebruik gemaakt van eenvoudige aritmetica. Al-Qalaṣādī heeft, net zoals veel Arabische geleerden, ook meerdere werken van elementaire aard geschreven. Eén daarvan is getiteld *Kashf al-Asrār ‘an ‘Ilm Ḥurūf al-Ghubār*, ‘De onthulling der geheimen van de wetenschap van de cijfertekens’. De Arabische tekst van de *Kashf al-Asrār* is minstens twee keer gedrukt en er bestaat ook een franse vertaling van.² De tekst is niet zeldzaam, er bestaan vele handschriften van (wat er op

¹ Zie hierover bij voorbeeld M.J. de Goeje, ‘De oorsprong van ons cijferschrift’, in *De Gids* 1864, pp. 457-467, en meer recentelijk Wim Gerritsen & Arnoud Vrolijk, ‘De oudste Leidse nullen’, in *Omslag* 2008/1, pp. 10-11. Plaatsgebrek verhindert het om hier nader in te gaan op de aard en herkomst van de zgn. *ghubār* cijfers.

² Een editie uit Fes uit 1315 (1897-1898), en de editie en vertaling door Muḥammad Suwayṣī (M. Souissi), Tunis, Bayt al-Ḥikma, 1988. Bij het schrijven van deze bijdrage stonden deze edities en de vertaling mij niet ter

duidt dat de tekst gedurende lange tijd populair is geweest) en één van die handschriften bevindt zich in mijn eigen verzameling.³ In Ramaḍān 1398 (= augustus 1978) heb ik het in een boekhandel in Fes gekocht. De tekst van al-Qalaṣādī's verhandeling beslaat ruim dertig bladzijden (ff. 210b-226a) in een verzamelbundel van een kleine zeshonderd bladzijden met zo'n twintig teksten over allerlei onderwerpen, vooral over recht en rekenkunde, over kalendercomputatie en de verdeling van de erfporties. Mijn exemplaar van de *Kashf al-Asrār* is op 10 Dhū al-Qa'da 1266 (= 17 september 1850) door de kopiist al-Tihāmī b. al-Hāshimī b. 'Abd al-Nūr al-R...mawī (?) al-Zammūrī al-Ḥassānī afgeschreven, betrekkelijk laat dus. Niet alleen heeft deze kopiist de tekst accuraat afgeschreven, maar hij heeft er ook een veelkleurig kunstwerk van gemaakt. Makkelijk leesbaar is de tekst voor wie geen ervaring met het Noord-Afrikaanse schrift heeft niet bepaald, en wanneer ik in mijn cursus paleografie dit handschrift aan de studenten liet zien als het huiswerk voor de volgende keer, ging er steeds een lichte huivering door het zaaltje leergierigen.⁴ Het handschrift ziet er zo uit:



Al-Qalaṣādī, *Kashf al-Asrār*, inleiding. Handschrift collectie Witkam nr. 35, f. 210b.

beschikking. Zie over al-Qalaṣādī's wetenschappelijke vorming Manuela Marín, 'The making of a mathematician: al-Qalaṣādī (d. 891/1486) and his *Rihla*', in *Suhayl* 4 (2004), pp. 295-310.

³ Handschrift nr. 35 van mijn verzameling.

⁴ Zie mijn cursussheet voor dit handschrift op het internet:

http://www.islamicmanuscripts.info/courses/arabic_manuscripts/W-035-12-Qalasadi-Kashf.pdf

Hieronder volgt mijn transcript van de eerste bladzijde van het handschrift met de inleiding van al-Qalaṣādī's *Kashf al-Asrār*. De klinkers en andere leestekens heb ik niet overgenomen. Wel heb ik een poging gedaan om het kleurrijke aspect van het handschrift in het transcript en in de vertaling enigszins tot zijn recht te laten komen.

اللهم الاستعانة على الاختتام بجاه سيدنا محمد خير الانام
 بسم الله الرحمن الرحيم وصلى الله على سيدنا محمد وءاله وصحبه وسلم
 يقول عبد الله تعالى على بن محمد بن علي القرشي الشهير بالقصادي البسطي وفقه الله تعالى ورضى عنه ونفعنا به
 الحمد لله سريع الحساب مسبل النعمة وفتاح الابواب والصلاة والسلام على سيدنا محمد سيد الكونين المبعوث الى
 الثقليين اما بعد فهذه نبذة كافية شافية وعن جانبي الاخلال والاملال متجافية اقتطفتها من كتابي المسمى بكشف
 الحجاب عن علم الحساب لتكون غنية لبعض الطلاب وتذكرة لاولي الالباب وسميتها بكشف الاسرار عن علم حروف
 الغبار ومن الله اسئل الاعانة والارشاد الى سواء طريق التوفيق والسداد في هاذه الدنيا والمعاد وأن يجعل ذلك من
 الاعمال التي لا تقطع بالموت ولا تعقب صاحبها حسرة الفوت وتشتمل على مقدمة وأربعة أجزاء وخاتمة وفي كل جزء
 ثمانية ابواب فاما المقدمة في صفة وضع هاذه الاحرف وما يتعلق بذلك وهي تسعة اشكال متخالفة اولها الواحد وبعده
 الاثني الى التسعة ولتضع الواحد اعلى وتحت الاثني الى اءاخرها هاكذا 9 8 7 6 5 4 3 2 1 فاذا كان معك عشرة
 فانزل صفرا وهو حلقة صغيرة وبعده الواحد هاكذا 10 واذا كان معك عشرون فانزل صفرا وبعده الاثني هاكذا 20
 وكذلك الى التسعين على هاذه الصورة 90 واذا كان معك احد عشر فانزل واحدا وبعده واحدا ثانيا هاكذا 11 واذا كان
 معك اثنا عشر فانزل الاولي الاثني وبعدها واحد هاكذا 12 وكذلك الى التسعة عشر واذا كان معك اءاحاد وعشرات
 ومئون فانزل الاحد في الاولي والعشرات في الثانية والمئون في الثالثة ومثال من ذلك اذا قيل لك انزل احد عشر ومائة
 فانزل ذلك هاكذا 111 لان واحدا في المرتبة الاولي بواحد وفي الثانية بعشرة وفي الثالثة بمائة واذا قيل لك انزل ثلاثة
 واربعين وسبعماية فانزل ذلك هاكذا 743 وان قيل لك انزل خمسة وعشرين وتسعمائة فانزل ذلك هاكذا 925 واذا كان
 معك الالف فانزلها في المرتبة الرابعة ومثال من ذلك اذا قيل لك انزل ثلاثة وسبعين وخمسة وسبعة اءالف فانزل
 ذلك هاكذا 7573 وان لم يكن في بعض المنازل عدد فانزل هناك صفرا يحفظ تلك المنزلة ومثال من ذلك اذا قيل لك
 انزل خمسة وثلاثماية فانزل اولا الخمسة وبعدها صفرا وبعد ذلك الثلاثة هاكذا 305 وان قيل لك انزل عشرين وثمانية
 اءالف فانزل ذلك هاكذا 8020

Vertaling van de inleiding van al-Qalaṣādī's *Kashf al-Asrār*:

‘O God, wij vragen U hulp bij het voltooien hiervan, bij de roem van onze heer Muḥammad, de beste der mensen.

In de naam van God, de Barmhartige, de Erbarmende, en God zegene onze heer Muḥammad en zijn familie en zijn gezellen, en schenke hun vrede.

Aldus spreekt de dienaar van God, de Allerhoogste, ‘Alī bin Muḥammad bin ‘Alī al-Qurashī, beter bekend als al-Qalaṣādī uit Baza, moge God, de Allerhoogste, hem genade schenken en welbehagen in hem vinden, en moge Hij hem voor ons tot nut laten zijn. Lof aan God, Die snel is in de Afrekening, Die weldaden verspreidt, en Die de poorten opent. En zegening en vrede zij over onze heer Muḥammad, de heer der beide werelden, die gezonden is naar mens en djinn.

Nu terzake. Dit is een korte tekst, voldoende en helder, zonder gebrek en evenmin vervelend, die ik geselecteerd heb uit mijn eigen boek *Kashf al-Ḥiḡāb ‘an ‘Ilm al-Ḥisāb*, ‘Het tipje van de sluier, afgenomen van de rekenkunde’, in de hoop dat hij een rijk geschenk is voor sommige studenten en een goede uiteenzetting voor intelligente lieden. Ik heb deze tekst de titel gegeven *Kashf al-Asrār ‘an ‘Ilm Ḥurūf al-Ghubār*, ‘De onthulling der geheimen van de wetenschap van de cijfertekens’, en ik vraag God om hulp en rechte leiding op de weg tot zowel het succes als het geluk, zowel in deze wereld als

in de wereld die hierna komt. En ik vraag Hem dat Hij dit werk onderbrengt bij de werken die niet door de dood worden afgebroken, en voor welke de auteur niet wordt gestraft na zijn overlijden. Deze verhandeling bestaat uit een inleiding, vier delen en een nawoord, en ieder deel bestaat weer uit acht hoofdstukken.

Welnu, de inleiding omschrijft hoe deze cijfertekens moeten worden geplaatst, en wat daar verder mee te maken heeft. Het betreft hier negen verschillende vormen. De eerste is de één, daarna komt de twee, en zo voorts tot de negen. De één moet je boven aan zetten, daaronder de twee, en zo voorts, tot de laatste, zo dus: 1 2 3 4 5 6 7 8 9.⁵ Als je het getal tien hebt, dan zet je een nul neer, dat is een klein rondje, en daarna zet je de één, aldus: 10.⁶ Als je het getal twintig hebt, dan zet je een nul neer en daarna de twee, aldus: 20. En zo gaat het door tot negentig, en dat getal ziet er zo uit: 90. Als je het getal elf hebt zet je een één neer en daarna een tweede één, zo: 11. Heb je het getal twaalf dan zet je in de eerste positie de twee en daarna komt een één, aldus: 12. En zo gaat het door tot negentien. Heb je eenheden, tientallen en honderdtallen, dan zet je de eenheid neer in de eerste positie, de tientallen in de tweede positie en de honderdtallen in de derde positie. Een voorbeeld: als jou wordt gezegd: ‘zet het getal honderd elf neer’, dan zet je dat zo neer: 111, omdat er een één staat in de eerste positie, die van de eenheid, en een één in de tweede positie, die van het tiental, en een één in de derde positie, die van het honderdtal. Als jou wordt gezegd: ‘zet het getal zeventien neer’, dan zet je dat als volgt neer: 743. Als jou wordt gezegd: ‘zet het getal zeventien neer’, dan zet je dat zo neer: 7573. En als voor een van de posities geen hoeveelheid wordt aangegeven dan zet je daar een nul neer, en daarmee behoud je die positie. Een voorbeeld hiervan is als volgt. Als jou gezegd wordt: ‘zet het getal driehonderd vijf neer’, dan zet je eerst de vijf neer, dan een nul en daarna de drie, zo dus: 305. En als jou gezegd wordt: ‘zet het getal achtduizend twintig neer’, || dan zet je dat zo neer: 8020.’

Al-Qalaṣādī beschrijft wat in zijn tijd zowel in de Arabische wereld als in West Europa al geruime tijd gemeengoed was. Men hoeft daarvoor maar de beschrijving van de Indische cijfers te lezen bij Leonardo van Pisa (Fibonacci, 1170-1250), die het werken met de ‘Indische cijfers’ in het eerste hoofdstuk van zijn *Liber abaci* uit 1202 uitlegt.⁷ Hij was de eerste die het decimale systeem in Europa bracht, en hij deed dat met behulp van de Arabische bronnen, waartoe hij toegang had. Hij beschreef het positionele systeem en begon daarbij met de eenheden en ging vandaar via de tientallen, honderdtallen, enz., verder. Maar wanneer hij zijn voorbeelden geeft worden deze door de andere schrijfrichting van het Latijnse schrift automatisch ‘goed’ geschreven. Waar de Arabieren hun cijfers werkelijk ook van rechts naar links, dus te beginnen met de eenheden, schreven, schreven de Europeanen diezelfde cijfers van het begin af in omgekeerde volgorde. Het is aardig om op te merken dat de Arabieren van onze tijd hun getallen ‘net als bij ons’ schrijven, te beginnen met het cijfer in de positie met de hoogste waarde, en vandaar omlaag, tot de eenheden. Wanneer zij begonnen zijn dat te doen? Geen idee. Hebben zij dat misschien altijd gedaan? Niet onmogelijk.

Deze en andere gedachten van algemene en elementaire aard kwamen bij mij op toen mij gevraagd werd een korte bijdrage te leveren aan het vriendenboek dat op 11 november 2011 aan mijn oude vriend (Leiden 1964, *heu quondam!*), Kees van Hee bij gelegenheid van zijn vertrek als decaan van de Faculteit Wiskunde en Informatica en als hoogleraar ‘Architectuur van informatiesystemen’ in Eindhoven wordt aangeboden. Ik heb geprobeerd een onderwerp te vinden dat zowel mijn eigen vakgebied, ‘Handschriftenkunde van de islamitische wereld’, als het zijne betreft (nou ja, op het niveau van bouwstenen hoogstens). Ik wens Kees van Hee van harte toe dat hij in de komende tijd soms ook aan Fibonacci en al-Qalaṣādī zal denken, aan hoe wij onze getallen, heel pragmatisch, in feite achterstevoren schrijven, en zo nu en dan ook aan onze kleurrijke vriendschap die niet in cijfers in welke volgorde of kleur dan ook is uit te drukken. Daar kan hij op rekenen.

⁵ Om niet in de war te komen met de horizontale opbouw bij de decimale notatie van de gehele getallen staat deze serie cijfers van 1 t/m 9 in het handschrift verticaal. Dit heb ik in het transcript en de vertaling niet nagevolgd.

⁶ In de vertaling klopt dat niet meer, omdat ‘wij’ de cijfers binnen de getallen van links naar rechts, dus andersom schrijven.

⁷ L.E. Sigler (transl.), *Liber Abaci. A translation into modern English of Leonardo Pisano's Book of Calculation*. New York, etc. (Springer-Verlag) 2002, pp. 17-22.